

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8 FEBRUARIE 2026

CLASA A XII-a

SUBIECTUL I (40 de puncte)

Pentru fiecare dintre următoarele 10 probleme, una singură dintre cele cinci variante de răspuns este corectă. Pe formularul de înregistrare a răspunsurilor la problemele cu alegere multiplă (grilă), indică varianta corectă de răspuns:

(4p) 1. Se consideră grupul $(G, *)$, unde $G = (-1, 1)$ și $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y \in (-1, 1)$. Dacă

$$A = \frac{1}{3} * \frac{1}{5} * \frac{1}{7} \text{ și } B = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{1}{6}, \text{ atunci:}$$

- A. $A > B$ B. $A < B$ C. $A = B$ D. $A + B = 1$ E. $A \cdot B = 1$

(4p) 2. Funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (-1, 1)$, $f(x) = \frac{mx+n}{x+1}$, unde $m, n \in \mathbb{R}$, este izomorfism între grupurile

(G_1, \cdot) și $(G_2, *)$, unde $G_1 = (0, \infty)$ și operația " \cdot " este înmulțirea numerelor reale, iar

$G_2 = (-1, 1)$ și $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, pentru orice $x, y \in G_2$. Atunci:

- A. $m+n=1$ B. $m+n=0$ C. $m+n=-1$ D. $m+n=\frac{1}{2}$ E. $m+n=-\frac{1}{2}$

(4p) 3. Pe mulțimea $M = [1, \infty)$ definim legea de compoziție asociativă $x * y = (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)^2$.

Numărul $1^2 * 2^2 * \dots * 10^2$ este egal cu:

- A. 2116 B. 1024 C. 2048 D. 4096 E. 55

(4p) 4. Care este probabilitatea ca, alegând un element din \mathbb{Z}_{30} , acesta să nu aparțină niciunui subgrup propriu al grupului $(\mathbb{Z}_{30}, +)$?

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{4}{15}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{5}$ E. $\frac{2}{3}$

(4p) 5. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Suma soluțiilor ecuației $x * x * x * x = x$ este egală cu:

- A. $\frac{3}{2}$ B. 2 C. 3 D. $\frac{7}{2}$ E. $\frac{5}{2}$

(4p) 6. Fie $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6 \ln x - \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$. Imaginea funcției f este:

- A. $[0, \infty)$ B. $[0, f(\sqrt{\ln 3})]$ C. $(-\infty, f(\sqrt{\ln 3})]$ D. $(-e, 1]$ E. \mathbb{R}

(4p) 7. Dacă F_n este o primitivă a funcției $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x \cdot e^{nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $\frac{1}{n^2} + F_n(0) = 0$, atunci numărul $F_n(1)$ este egal cu:

- A. $\frac{1+ne^n}{n^2}$ B. $\frac{1+(n-1)e^n}{n^2}$ C. $\frac{1+(n+1)e^n}{n^2}$ D. $\frac{(n-1)e^n}{n^2}$ E. $\frac{1+e^n}{n}$

(4p) 8. Valoarea integralei $\int_0^2 \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{(x^2 - 2x + 5)^{2025}} dx$ este:

- A. $\frac{1}{2^{2025}}$ B. $\frac{4}{5^{2025}}$ C. 0 D. 1 E. $\frac{1}{2026}$

(4p) 9. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ definim șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$. Valoarea lui n pentru care

are loc egalitatea $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{2026}$ este:

- A. 2023 B. 2024 C. 2025 D. 2026 E. 2027

(4p) 10. Valoarea integralei $\int_3^{15} \left(\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+17-8\sqrt{x+1}} \right) dx$ este:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. 24 C. 45 D. 12 E. 48

La subiectele II și III scrie rezolvările complete:

SUBIECTUL II (25 de puncte)

Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât mulțimea $A = [a, +\infty)$ să fie parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea de compoziție:

$$x \circ y = xy + x + y, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Supliment Gazeta Matematică nr. 9 / 2025

SUBIECTUL III (25 de puncte)

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata continuă, și $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Calculați limitele:

a) $L_1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b (f(x+h) - f(x)) dx;$

b) $L_2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_a^b (f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)) dx.$

Note: Toate subiectele sunt obligatorii.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru: 3 ore.